029 702 J. 1665

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

$\mathfrak{M}_p$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes; I est la matrice unité et **0** *la matrice nulle de $\mathfrak{M}_p$. L'addition des matrices et le produit d'une matrice par un scalaire complexe munissent $\mathfrak{M}_p$ d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$.*

I

1° A toute matrice $A \in \mathfrak{M}_p$, de coefficients a_{ij}, on associe le nombre : $tr\,(A) = \sum_{i=1}^{p} a_{ii}$, appelé trace de A.

Démontrer que l'application « tr » ainsi définie est une application linéaire de $\mathfrak{M}_p$ dans $\mathbb{C}$.

2° Démontrer que quelles que soient les matrices A et B appartenant à $\mathfrak{M}_p$:

$$tr\,(AB) = tr\,(BA)$$

3° E étant un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, de dimension p, rapporté a une base (b_0); un endomorphisme φ de E est défini par une matrice $A \in \mathfrak{M}_p$. Soit (b_1) une nouvelle base de E, définie à partir de (b_0) par une matrice de passage P, de coefficients P_{ij} ; l'endomorphisme φ est défini dans cette nouvelle base pour une matrice A' :

a. Exprimer en le justifiant A' en fonction de A et de P.

b. Montrer alors que la trace d'une matrice est un invariant par tout changement de base.

4° Démontrer que si A a pour valeurs propres $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par S_n la trace de A^n, on a :

$$S_n = \sum_{i=1}^{p} s_i^n .$$

II

Soit $l(A)$ la transposée de la matrice des cofacteurs de A ; $l(A) = (l_{ij})$, l_{ij} = cofacteur de a_{ji}. On rappelle que si A est inversible, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, l(A)$$

Par ailleurs, dans la suite du problème, le polynôme caractéristique de la matrice A s'écrira :

$$P(s) = \det[s.I - A] = s^p + a_1 s^{p-1} + a_2 s^{p-2} + \ldots + a_{p-1} s + a_p .$$

Tournez la page S. V. P.

1° Montrer que $\forall A \in \mathfrak{M}_p$, A commute avec $l(A)$.

2° Montrer que $P'(s) = \dfrac{dP}{ds}$ peut s'écrire :

$$P'(s) = \sum_{i=1}^{p} \left[\frac{P(s)}{(s - s_i)} \right]$$

3° Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on se propose de diviser $P(s)$ par le polynôme du premier degré $(s - \lambda)$, tel que :

$$P(s) = (s - \lambda)(b_0 s^{p-1} + b_1 s^{p-2} + \ldots + b_{p-2} s + b_{p-1}) + b_p .$$

a. Montrer que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, il existe une relation de récurrence simple entre b_k et b_{k-1}.

b. En déduire alors $\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\}$, l'expression de b_k en fonction des a_k et de λ.

c. Exprimer $P'(s)$ sous la forme d'un polynôme de degré $(p - 1)$ dont les coefficients sont fonction des (a_i) et des (S_i).

d. Déduire alors la relation fondamentale :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, p\} \qquad S_k + a_1 S_{k-1} + \ldots + a_{k-1} S_1 + k a_k = 0 .$$

4° Lorsque $A \in \mathfrak{M}_p$ est inversible, calculer le déterminant de $l(A)$ et exprimer en fonction de A la matrice $l[l(A)]$.

5° Montrer que, pour tout $s \in \mathbb{C}$, la matrice :

$$Q(s) = l[s.I - A]$$

peut s'écrire sous la forme :

$$Q(s) = s^{p-1} B_0 + s^{p-2} B_1 + \ldots + s B_{p-2} + B_{p-1}$$

où les matrices $B_k \in \mathfrak{M}_p$.

6° Démontrer que si $C_0, C_1, \ldots C_k$ sont $(k + 1)$ matrices appartenant à $\mathfrak{M}_p$ et si $s \in \mathbb{C}$, la somme :

$$s^k C_0 + s^{k-1} C_1 + \ldots + s C_{k-1} + C_k$$

est nulle quel que soit s, si et seulement si l'on a :

$$C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_k = \mathbf{0} .$$

7° Calculer les matrices B_k, définies au II 5°, en fonction des puissances de A et des coefficients a_i du polynôme caractéristique $P(s)$, puis démontrer que l'on a alors :

$$A^p + a_1 A^{p-1} + a_2 A^{p-2} + \ldots + a_{p-1} A + a_p I = \mathbf{0} .$$

8° *a.* Calculer $l(-A)$ puis $l(A)$ en fonction des puissances de A et des coefficients a_k.

b. En déduire la trace de $l(A)$ en fonction des a_i et des traces S_n.

c. Montrer que $tr[l(A)]$ s'exprime à l'aide de l'un des a_k pour une valeur de k à préciser.

9° *a.* Montrer que si α est valeur propre de A

$$R(\alpha) = (-1)^{p-1} [\alpha^{p-1} + a_1 \alpha^{p-2} + \ldots + a_{p-1}]$$

est valeur propre de $l(A)$.

b. Si α est de plus valeur propre non nulle de A, en déduire une relation entre $R(\alpha)$ et $\det(A)$.

. . . /. . .

III

a désigne un nombre réel donné, appartenant à $[-1, +1]$, $\{U_n(a)\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est la suite numérique vérifiant les relations :

$$U_1(a) = 2a\ ; \qquad U_2(a) = 4a^2 - 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \qquad U_n(a) = 2a\,U_{n-1}(a) - U_{n-2}(a).$$

1° On pose $U_{n-1}(a) = V_n(a)$ et $X_n(a) = \begin{pmatrix} U_n(a) \\ V_n(a) \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe une matrice $\Gamma_a \in \mathfrak{M}_2$, telle que :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad X_n(a) = \Gamma_a^{n-2} X_2(a).$$

2° *a.* Dans le cas particulier où $a = 1$, démontrer par récurrence à partir du II-7° que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \Gamma_1^k = k\,\Gamma_1 - (k-1).I.$$

b. Calculer alors $X_n(1)$ et en déduire la valeur de $U_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Retrouver ce résultat en utilisant directement la relation de récurrence définissant la suite $\{U_n(a)\}$.

3° Calculer dans les mêmes conditions $U_n(-1)$.

a. En exprimant Γ_{-1}^{n-2}.

b. En utilisant directement la relation de récurrence définissant la suite $\{U_n(a)\}$.

4° Dans le cas général où $a \in]-1, +1[$, on pose :

$$\theta = \text{Arc Cos } a$$

a. Calculer en fonction de θ, les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice $\Gamma_a \in \mathfrak{M}_2$.

b. Vérifier que la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 \\ 1 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonalisante de Γ_a et calculer Γ_a^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

c. Vérifier alors que $U_n(a)$ peut s'exprimer en fonction de θ sous la forme :

$$U_n(a) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

5° Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$a \longmapsto U_n(a)$$

est la restriction à l'intervalle $]-1, +1[$ d'une fonction polynôme dont les racines sont toutes réelles, distinctes et appartenant à cet intervalle; donner leurs valeurs et préciser le degré du polynôme.

IV

Applications numériques

A tout $n \in \mathbb{N}^*$, on associe la matrice $A_n \in \mathfrak{M}_n$, dont les coefficients $(A_n)_{ij}$ sont ainsi définis :

$$\begin{cases} (A_n)_{ii} = 2, & \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}. \\ (A_n)_{ii+1} = (A_n)_{i+1\,i} = -1, & \forall i \in \{1, 2, \ldots, (n-1)\} \end{cases}$$

tous les autres coefficients $(A_n)_{ij}$ étant nuls.

Tournez la page S. V. P.

1° On pose pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\det [A_n - s.I] = D_n(s)$$

a. Calculer $D_1(s)$ et $D_2(s)$.

b. Démontrer qu'il existe deux nombres α et β fonction de s tels que l'on ait :

$$\forall n \geqslant 2, \quad D_{n+1}(s) = \alpha D_n(s) + \beta D_{n-1}(s).$$

2° Utilisant les résultats du III-2°, donner pour tout n la valeur de det (A_n).

3° A partir des résultats obtenus au III.4°, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les valeurs propres de A_n ; vérifier qu'elles sont toutes distinctes, réelles et comprises entre 0 et 4.

4° Déterminer les valeurs de n pour lesquelles :

a. 1 est valeur propre de A_n ;

b. 2 est valeur propre de A_n ;

c. 3 est valeur propre de A_n.

5° *a.* Pour quelles valeurs de n, A_n admet-elle les trois valeurs propres 1, 2, 3 ?

b. Donner alors toutes les valeurs propres de A_5.

6° Déterminer les vecteurs propres de A_5 associés aux valeurs propres entières.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail